

### Касательная к окружности. Определение, свойства

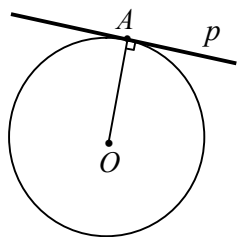
Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной к окружности**, а их общая точка называется **точкой касания** прямой и окружности.

На рисунке 1 прямая  $p$  – касательная к окружности с центром  $O$ ,  $A$  – точка касания.

#### Теорема о свойстве касательной к окружности

**Теорема.** Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Рис. 1



**Дано:**  $\omega(O; OA)$ ,  
 $p$  – касательная к окружности,  
 $A$  – точка касания.

**Доказать:**  $p \perp OA$ .

#### Доказательство (методом от противного)

Предположим, что  $p \nsubseteq OA$  (рис. 1).

В этом случае радиус  $OA$  является наклонной к прямой  $p$ . Так как перпендикуляр, проведённый из точки  $O$  к прямой  $p$ , меньше наклонной  $OA$ , то расстояние от центра  $O$  окружности до прямой  $p$  меньше радиуса. Следовательно, прямая  $p$  и окружность имеют две общие точки, т.е.  $p$  – секущая. Но это противоречит условию теоремы, что  $p$  – касательная к окружности.

Так как получили противоречие, то предположение, что  $p \nsubseteq OA$  было неверным, значит,  $p \perp OA$ .

**Итак**, касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

**Ч.т.д.**

Верна и теорема, обратная теореме о свойстве касательной – **признак касательной**.

**Теорема.** Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

**Дано:**  $\omega(O; OA)$ ,  $p$ ,  $A \in p$ ,  $p \perp OA$  (рис. 1).

**Доказать:**  $p$  – касательная к  $\omega(O; OA)$ .

#### Доказательство

По условию  $p \perp OA$ ,  $OA$  – радиус окружности, поэтому расстояние от центра окружности до прямой  $p$  равно радиусу  $OA$ . Следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. А это означает, что данная прямая  $p$  является касательной к окружности.

**Итак**, если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

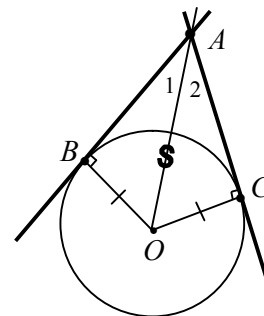
**Ч.т.д.**

На рисунке 2 проведены две касательные к окружности с центром  $O$ , проходящие через точку  $A$  и касающиеся окружности в точках  $B$  и  $C$ , при этом отрезки  $AB$  и  $AC$  называются **отрезками касательных, проведенных из точки  $A$** . Они обладают свойством, сформулированным в следующей теореме.

#### Теорема об отрезках касательных к окружности, проведенных из одной точки

**Теорема.** Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Рис. 2



**Дано:**  $\omega(O; r)$ ,  $A \notin \omega(O; r)$ ,  
 $AB$ ,  $AC$  – касательные к окружности,  
 $B$  и  $C$  – точки касания.

**Доказать:**  $AB = AC$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .

#### Доказательство

Так как касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, то  $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$ , а  $\triangle ABO$  и  $\triangle ACO$  – прямоугольные (рис. 2).

Рассмотрим  $\triangle ABO$  и  $\triangle ACO$ .

$AO$  – общая сторона,  $OB = OC$  как радиусы одной окружности. Следовательно,  $\triangle ABO = \triangle ACO$  по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету).

В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому  $AB = BC$  и  $\angle 1 = \angle 2$ .

**Итак**, отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

**Ч.т.д.**